Раскраски циклов

1. Витя задумал набор из 100 множеств: A_1, A_2, ..., A_{100}. За один ход Маша называет любые два индекса $i \neq j$ от 1 до 100, а Витя выдаёт множества $A_i \cup A_j$ и $A_i \cap A_j$. Найдите наименьшее количество ходов, за которое Маша может гарантированно определить множества, загаданные Витей.

2. В стране некоторые пары городов соединены дорогами, причём из каждого города выходит 100 дорог. *Пучком* назовём набор из 10 дорог, выходящих из одного города. Докажите, что все дороги можно разбить на несколько пучков.

3. В стране 2023 города, каждые два города соединены авиалинией. Цены билетов на всех авиалиниях различны. Могут ли все круговые маршруты, проходящие через каждый город по одному разу, стоить одинаково?

4. В некоторой стране из каждого города выходит по 3 железные дороги. Две компании собираются приватизировать все эти участки, но антимонопольный комитет настаивает на том, чтобы из каждого города выходили дороги разных компаний. Докажите, что компании могут договориться.

5. Вершины правильного 2024-угольника разбили на пары и в каждой паре провели отрезок с концами в этих вершинах. Полученные 1012 отрезка не имеют общих точек. Докажите, что на этих отрезках можно расставить направления так, что сумма полученных векторов будет равна нулю.

6. Имеется $4n$ камушков массами $1, 2, \ldots, 4n$. Каждый из камушков покрашен в один из n цветов, причём имеется по 4 камушка каждого цвета. Докажите, что камушки можно разделить на две кучи равной массы так, чтобы в каждой куче было по два камушка каждого цвета.

7. Будем говорить, что граф является *n-хорошим*, если среди любых n его вершин проходит ребро. Найдите наименьшее натуральное число N такое, что в любом n-хорошем связном графе с N вершинами существует цикл, при удалении рёбер которого граф останется связным.